E.P.I.T.A.
Mathématiques (Option : durée 1h30)

On considère la fonction Zêta de Riemann, définie pour tout nombre réel $x > 1$ par:

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

1°) On étudie quelques propriétés générales de la fonction Zêta.

a) Prouver, pour tout réel $a > 1$, que la série définissant la fonction Zêta est normalement convergente sur $[a, +\infty[$, et en déduire la continuité de ζ sur $]1, +\infty[$.

b) Déterminer (sans calcul de dérivée) le sens de variation de la fonction ζ.

2°) On calcule les nombres $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$ et on considère à cet effet la fonction 2π-périodique f définie pour $-\pi \leq t \leq \pi$ par $f(t) = t^2$.

a) Montrer sans calculs que cette fonction f est somme de sa série de Fourier, en citant clairement l'énoncé du théorème utilisé.

b) Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n (coefficients de cosnt et sinnt) de f.
On précisera la série de Fourier de f sous forme de série en cosnt et sinnt, puis en exp(int).

c) En déduire le nombre $\zeta(2)$ puis, à l'aide de l'égalité de Parseval, le nombre $\zeta(4)$.

3°) On étudie la fonction Zêta aux bornes de son intervalle de définition $]1, +\infty[$.

a) En comparant $1/n^x$ à une intégrale, établir l'encadrement suivant de $\zeta(x)$ pour $x > 1$:

$$\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq \frac{1}{x-1} + 1.$$

b) En déduire les limites et des équivalents de $\zeta(x)$ quand x tend vers 1 et $+\infty$.

4°) On précise enfin le développement asymptotique de la fonction Zêta en 1.
A cet effet, on introduit la série de fonctions suivante, dont le terme général u_n est défini pour tout nombre entier $n \geq 1$ et tout nombre réel $x \geq 1$ par :

$$u_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x}.$$

On rappelle par ailleurs que la constante d'Euler est le nombre réel γ défini par :

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n).$$

a) Calculer la somme de la série de terme général $u_n(1)$ pour $n \geq 1$.

b) Calculer la somme de la série de terme général $u_n(x)$ pour $n \geq 1$ et $x > 1$.

c) Prouver, pour tout réel $a > 1$, que la série de fonctions Σu_n est normalement convergente sur $[1, a]$, et en déduire la continuité de la série de fonctions Σu_n au point 1 à droite.

d) En déduire enfin que $\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + \varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 1.

***